5.4 Extrémums liés

Définition

Soient $f(x,y)$ et $g(x,y)$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage d'un point (x_0,y_0).

$$S = \{(x,y) \quad \text{tel que} \quad g(x,y) = 0\}$$

f présente sous la contrainte $g = 0$ un minimum local (respectivement maximum local) en (x_0,y_0) si la restriction de f à S présente un minimum local (respectivement maximum local)en (x_0,y_0).

Définition

On dit que f présente sous la contrainte $g = 0$ un minimum global (respectivement maximum local) en (x_0,y_0) si la restriction de f à S présente un minimum local (respectivement maximum global)en (x_0,y_0).

5.4.1 Méthode par Substitution

dans la contrainte $g(x,y) = 0$, on exprime :
- soit la variable x en fonction de y : on obtient $x = h(y)$.
- soit la variable y en fonction de x : on obtient $y = h(x)$.
Dans les deux cas, h est une fonction d'une variable. les valeurs $f(x,y)$ deviennent alors :
- Soit $L(y) = f(h(x),y)$ dans le premier cas ;
- Soit $L(x) = f(x,h(y))$ dans le second cas ;

Exemple

On considére la fonction $f(x,y) = 2xy$ de domaine de définition $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$.
Trouver les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 2x+3y-6$.

$$g(x,y) = 0 \Rightarrow y = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$f(x,y) = L(x) = f(x, 2 - \frac{2}{3}x) = 2x(2 - \frac{2}{3}x)$$

$$L(x) = 2x(2 - \frac{2}{3}x)$$

-

$$L^{'}(x) = -\frac{8}{3}x + 4$$

-

$$L^{'}(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

-

$$L^{''}(x) = -\frac{8}{3} \Rightarrow L^{''}(\frac{3}{2}) < 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\text{est un maximum.}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2 - \frac{2}{3}\frac{3}{2} = 1$$

Donc $(\frac{3}{2},1)$ est un maximum de $f(x,y)$sous la contrainte $g(x,y) = 2x+3y-6$

5.4.2 Méthode de Lagrange

Trouver les extrema de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$.

$$h(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) \qquad \underline{\textbf{dite Lagrangien}}$$

$h(x,y,\lambda)=$ Fonction à optimiser $+\lambda$ (contrainte annulée),

λ(multiplicateur de Lagrange) est un inconnue.

Théoréme 44 *Soient f et g deux fonctions possédant des dérivées partielles.*
Soit $P_0=(x_0,y_0)$ un point intérieur à $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$
Si P_0 est un point d'extremum local de f sur $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathscr{D}_f/g(x,y)=0\}$ et que $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$ alors $\nabla g(x_0,y_0)$ et $\nabla f(x_0,y_0)$ sont alignés. C'est à dire : il existe un scalaire $\lambda_0\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$$

P_0 est appelé un point stationnaire de f sur $\mathscr{D}$ et λ_0 est appelé multiplicateur de Lagrange associé.

PROPOSITION 41 *(Méthode du Lagrangien).*
$P_0=(x_0,y_0)$ est un point stationnaire sur $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathscr{D}_f/g(x,y)=0\}$ associé au multiplicateur de Lagrange λ_0 ssi (x_0,y_0,λ_0) est solution du systéme d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,\lambda)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,\lambda)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \\ \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=g(x,y)=0 \end{cases}$$

Les solutions du systéme sont appelés ***Les points critiques***

Théoréme 45 *(Weierstrass).*
Toute fonction f continue sur un ensemble K borné et fermé (qui contient ses bords) posséde un maximum global et un minimum global

PROPOSITION 42 *((Caractérisation* ***faible*** *des points stationnaires sous contrainte - Condition suffisante du second ordre).)*
Soit (x_0,y_0) un point critique de la fonction h de classe $\mathscr{C}^2$.
Posons la fonction de deux variables

$$h(x,y,\lambda_0)=h_0(x,y)=f(x,y)+\lambda_0 g(x,y)$$

On pose :

$$r=\partial^2_{x^2}h_0(x_0,y_0); \qquad s=\partial^2_{xy}h_0(x_0,y_0); \quad et \quad t=\partial^2_{y^2}h_0(x_0,y_0)$$

et

$$\triangle_0=rt-s^2$$

le développement de Taylor de h_0 avec (x_0,y_0) etant un point stationnaire :$\nabla h_0(x_0,y_0)=0$ et

$$h_0(x_0+h,y_0+k)=h_0(x_0,y_0)+\frac{1}{2}[rh^2+2shk+tk^2]$$

Donnons un nom à la fonction de deux variables de droite :

$$Q(h,k)=rh^2+2shk+tk^2$$

Alors
• *Si* $\triangle_0 > 0$
-si $r > 0$ *, alors* f *présente un minimum local au point* (x_0, y_0)
- si $r < 0$*, alors* f *présente un maximum local au point* (x_0, y_0)
• *Si* $\triangle_0 < 0$

Quelle condition sur h, k permet d'obtenir un déplacement (h,k) aligné avec la tangente? Il faut et il suffit que

(h,k) soit orthogonal au gradient de g au point (x_0, y_0), c'est à dire lorsque :

$$(h,k)\nabla g(x_0, y_0) = 0$$

où on rappelle que :

$$(h,k)\nabla g(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

Dans la suite nous noterons pour simplifier :

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Ainsi

$$(h,k)\nabla g(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow ah + bk = 0$$

Nous sommes prêts à énoncer une nouvelle condition suffisantes du second ordre pour l'optimisation sous contrainte. Rappelons d'abord les notations :

•

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

• Soit (x_0, y_0, λ_0) un point stationnaire du Lagrangien :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

• Posons

$$h_0(x, y) = h(x, y, \lambda_0) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

et

$$r = \partial^2_{x^2} h_0(x_0, y_0); \qquad s = \partial^2_{xy} h_0(x_0, y_0); \quad \text{et} \quad t = \partial^2_{y^2} h_0(x_0, y_0)$$

• posons $Q(h,k)$ la fonction intervenant dans le développement limité du second ordre

$$Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$$

• Finalement Posons

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

PROPOSITION 43 *(Caractérisation* ***forte*** *des points stationnaires sous contrainte - Condition suffisante du second ordre).*
Si pour tout $(h,k) \neq 0$ *vérifiant* $ah + bk = 0$
• $Q(h,k) > 0$*, alors* (x_0, y_0) *est un minimum local sous contrainte pour* f*,*
• $Q(h,k) < 0$*, alors* (x_0, y_0) *est un maximum local sous contrainte pour* f*,*
• $Q(h,k) = 0$*, alors on ne peut rien dire.*

Méthodologie

1- Recherche des points stationnaires du Lagrangien :

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Pour chaque point stationnaire (x_0, y_0, λ_0) :
2- poser

$$h(x,y,\lambda_0) = h_0(x,y) = f(x,y) + \lambda_0 g(x,y)$$

et calculer

$$r = \partial^2_{x^2} h_0(x_0,y_0); \qquad s = \partial^2_{xy} h_0(x_0,y_0); \quad \text{et} \quad t = \partial^2_{y^2} h_0(x_0,y_0)$$

3- Si $rt - s^2 > 0$ Appliquer la **CS faible** du second ordre
4- Sinon : poser

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)$$

5- Appliquer la CS forte du second ordre.
Applications :
• Exemple 1
Optimiser $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $g(x,y) = xy - 1$

1- Le lagrangien est :

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$$

Trouvons les points stationnaires du Lagrangien : résoudre le systéme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} . \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} .$$

nous avions trouvé deux points stationnaires de ce Lagrangien $(x_1,y_1,\lambda_1) = (1,1,-2)$ et $(x_2,y_2,\lambda_2) = (-1,-1,-2)$

2- les deux multiplicateurs de Lagrange λ sont égaux à -2. Regardons donc

$$\mathscr{L}_0(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2$$

Nous avions calculé $r = 2$, $s = -2$ et $t = 2$ alors

$$\triangle_0 = rt - s^2 = 0$$

Donc ne nous permetait pas de déterminer la nature des deux points stationnaires sous contrainte.

3- Regardons le signe de $Q(h,k) = 2h^2 - 4hk + 2k^2$
dans les directions des tangentes la contrainte passant par nos deux points stationnaires : (Remarque : C'est le même Q pour les deux points stationnaires car ils sont associés au même multiplicateur de Lagrange.)
- Pour $(x_1,y_1) = (1,1)$
Calculons $a_1 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_1,y_1) = 1$ et $b_1 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_1,y_1) = 1$
Donc

$$a_1 h + b_1 k = 0 \Leftrightarrow k = -h$$

Pour de tels couples (h,k) par substitution, $Q(h,k) = Q(h,-h) = 2h^2 + 4h^2 + 2h^2 = 8h^2 > 0$ si $h \neq 0$
Donc $(1,1)$ est un minimum local sous contrainte pour f.

- Pour $(x_2, y_2) = (-1,-1)$
Calculons $a_2 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_2, y_2) = -1$ et $b_2 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_2, y_2) = -1$
Donc

$$a_2 h + b_2 k = 0 \Leftrightarrow k = -h$$

Pour de tels couples (h,k) par substitution, $Q(h,k) = Q(h,-h) = 2h^2 + 4h^2 + 2h^2 = 8h^2 > 0$ si $h \neq 0$
Donc $(-1,-1)$ est un minimum local sous contrainte pour f.

• Exemple 2
Optimiser $f(x,y) = x^2 y - 3e^x$ sous la contrainte $g(x,y) = y - e^x = 0$

1- **Lagrangien** est :

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 y - 3e^x + \lambda(y - e^x)$$

Trouvons les points stationnaires du Lagrangien : résoudre le systéme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} . \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 3e^x - \lambda e^x = 0 \\ x^2 + \lambda = 0 \\ y - e^x = 0 \end{cases} . \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3; y = e^{-3}; \lambda = -9 \\ \text{ou} \\ x = 1; y = e; \lambda = -1 \end{cases} .$$

On a trouvé deux points stationnaires sous contrainte :

$$(x_1, y_1 = (-3, e^{-3}) \quad \text{associé au multiplicateur} \quad \lambda = -9$$

et

$$(x_2, y_2 = (1, e) \quad \text{associé au multiplicateur} \quad \lambda = -1$$

2- **Nature des points stationnaires** :

- **Pour** $(x_1, y_1) = (-3, e^{-3})$ **:**
a) regardons les dérivées partielles secondes de la fonction de deux variables :

$$\mathscr{L}_1(x,y) = f(x,y) + \lambda_1 g(x,y) = x^2 y - 3e^x - 9(y - e^x)$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathscr{L}_1}{\partial x^2}(x,y) = 2y - 3e^x + 9e^x \\ \frac{\partial^2 \mathscr{L}_1}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial^2 \mathscr{L}_1}{\partial y^2}(x,y) = 0 \end{cases}$$

ainsi

$$r = \frac{\partial^2 \mathscr{L}_1}{\partial x^2}(x_1, y_1) = 8e^{-3} \qquad s = \frac{\partial^2 \mathscr{L}_1}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) = -6 \qquad t = \frac{\partial^2 \mathscr{L}_1}{\partial y^2}(x_1, y_1) = 0$$

b) Regardons $rt - s^2 = -36 < 0$. On ne peut pas conclure

c) Regardons

$$Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$$

sur l'espace tangent :

$$a_1 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1) = -e^{-3} \qquad \text{et} \qquad b_1 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1) = 1$$

Donc

$$a_1 h + b_1 k = 0 \Leftrightarrow k = e^{-3} h$$

Pour de tels couples (h,k) par substitution, $Q(h,k) = Q(h, e^{-3}h) = 8e^{-3}h^2 - 12e^{-3}h^2 = -4e^{-3}h^2 < 0$ si $h \neq 0$

Donc (x_1, y_1) est un maximum local sous contrainte pour f.

- **Pour** $(x_2, y_2) = (1, e)$ **:**

a) regardons les dérivées partielles secondes de la fonction de deux variables :

$$\mathscr{L}_2(x,y) = f(x,y) + \lambda_2 g(x,y) = x^2 y - 3e^x - (y - e^x)$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathscr{L}_2}{\partial x^2}(x,y) = 2y - 3e^x + e^x \\ \frac{\partial^2 \mathscr{L}_2}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial^2 \mathscr{L}_2}{\partial y^2}(x,y) = 0 \end{cases}$$

ainsi

$$r = \frac{\partial^2 \mathscr{L}_2}{\partial x^2}(x_2, y_2) = 0 \qquad s = \frac{\partial^2 \mathscr{L}_2}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) = 2 \qquad t = \frac{\partial^2 \mathscr{L}_2}{\partial y^2}(x_2, y_2) = 0$$

b) Regardons $rt - s^2 = -4 < 0$. On ne peut pas conclure

c) Regardons

$$Q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$$

sur l'espace tangent :

$$a_2 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_2, y_2) = -e \qquad \text{et} \qquad b_2 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_2, y_2) = 1$$

Donc

$$a_2 h + b_2 k = 0 \Leftrightarrow k = eh$$

Pour de tels couples (h,k) par substitution, $Q(h,k) = Q(h, eh) = 4eh^2 > 0$ si $h \neq 0$

Donc (x_1, y_1) est un minimum local sous contrainte pour f.

5.4.3 Matrice hessienne bordée

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

matrice hessienne bordée :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

dont le déterminant sera noté

$$|\mathbf{H}| = -(\frac{\partial g}{\partial x})^2 . \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial g}{\partial x} . \frac{\partial g}{\partial y} . \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - (\frac{\partial g}{\partial y})^2 . \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

5.4.4 Condition suffisante pour l'existence d'un extremum

PROPOSITION 44 *Soit* (x_0, y_0, λ^*) *un point critique de Lagrangien* $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ *de classe* $\mathscr{C}^2$, $\mathbf{H}$ *la matrice Hessienne de* F *aveoc* $|\mathbf{H}| = \det(\mathbf{H})$.*alors :*

- *Si* $|\mathbf{H}| < 0 \Rightarrow$ *le point* (x_0, y_0) *est un minimum pour* f

- *Si* $|\mathbf{H}| > 0 \Rightarrow$ *le point* (x_0, y_0) *est un maximum pour* f

- *Si* $|\mathbf{H}| = 0$ *on ne peut rien dire.*

Exemple

Optimiser $f(x,y) = -x^2 + xy$ sous la contrainte $g(x,y) = 20$ où $g(x,y) = 2x + y$

• 1^{er} étape : Recherche de point(s) critique(s) : - Le Lagrangien est :

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - 20)$$

donc

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = -x^2 + xy + \lambda(2x + y - 20)$$

• (x,y,λ) est un point critique de $\mathscr{L}$ si

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} . \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + 2\lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ 2x + y - 20 = 0 \end{cases} .$$

On trouve $(x,y,\lambda) = (\frac{10}{3}, \frac{40}{3}, -\frac{10}{3})$

• 2^{em} **étape : Nature de(s) point(s) critique(s) trouvé(s)**

- On calcule la Hessienne de $\mathscr{L}$ (ou la Hessienne de f bordée par la contrainte g)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\det(\mathbf{H}_{(\frac{10}{3}, \frac{40}{3}, -\frac{10}{3})}) = 6 > 0$$

Alors le point $(\frac{10}{3}, \frac{40}{3}, -\frac{10}{3})$ est un maximum pour f

Fin de Module

Bon Courage